Sección 8.1 – Resolución básica de Ecuaciones Cuadráticas.

Una ecuación cuadrática es de la siguiente forma general:

$$y = ax^2 + bx + c$$

ⓐ El principio de las raíces cuadradas

La ecuación $5x^2 + 8x - 2 = 0$ sigue la forma estándar de una fórmula cuadrática.

La ecuación $-5x^2 + 4x - 7 = 0$ no sigue la forma estándar de una fórmula cuadrática porque tiene coeficientes negativos.

Conviértala de la siguiente forma: multiplique por -1

$$-1\,(-5x^2 + 4x - 7) = 0(-1)$$

$$5x^2 - 4x + 7 = 0$$

Ejemplo 1: Resuelva $3x^2 = 2 - x$, Halle los interceptos de x en la función $f(x) = 3x^2 + x - 2$

Solución: Busque la forma estándar de la fórmula cuadrática.

$$3x^2 = 2 - x$$

$$3x^2 + x - 2 = 0$$

Factorize $(3x-2)(x+1)=0$

Use el principio de los productos en cero

$3x-2=0$ ó $x+1=0$

$3x=2$ $\qquad$ $x=-1$

$x=\frac{2}{3}$

Comprobe para $2/3$ y -1 en la ecuación original

$3x^2=2-x$ $\qquad$ $3x^2=2-x$

$3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \stackrel{?}{=} 2-\left(\frac{2}{3}\right)$ $\qquad$ $3(-1)^2 \stackrel{?}{=} 2-(-1)$

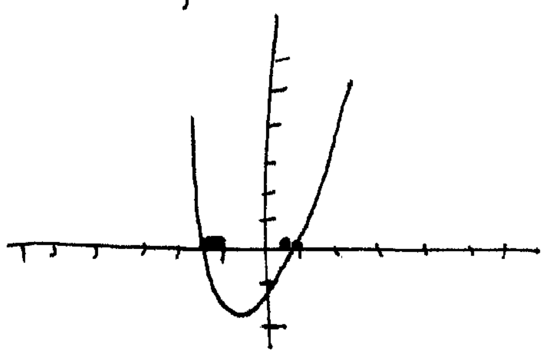
$3\cdot\frac{4}{9} \stackrel{?}{=} \frac{6}{3}-\frac{2}{3}$ $\qquad$ $3\cdot 1 \stackrel{?}{=} 2+1$

$\frac{12}{9}=\frac{4}{3} \stackrel{?}{=} \frac{4}{3}$ $\qquad$ $3 \stackrel{?}{=} 3$

$\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$ $\qquad$ $3=3$

Cierto $\qquad$ Cierto.

Los interceptos son entonces $\left(\frac{2}{3},0\right)$ y $(-1,0)$. Las soluciones de la ecuación $3x^2=2-x$ son las primeras coordenadas de los interceptos de la gráfica de $f(x)=3x^2+x-2$



Ejemplo 2. Resuelva $x^2 = 25$. Halle los interceptos de $f(x) = x^2 - 25$

Halle la forma estándar y factorize: $x^2 = 25$

$x^2 - 25 = 0$ Restar 25

$(x-5)(x+5)$ Factorización

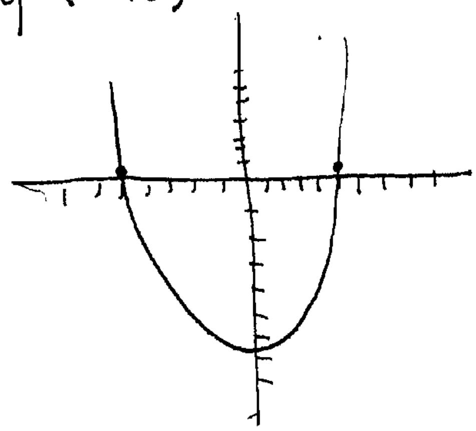
$x - 5 = 0$ $x + 5 = 0$ use el principio de los productos a cero.

$x = 5$ $x = -5$

Las soluciones son:

$(5,0)$ y $(-5,0)$

Su gráfica es



Ejemplo 3 Resuelva $6x^2 - 15 = 0$

Factorize y use el principio de los productos a cero.

$6x^2 - 15 = 0$

$3x(2x-5) = 0$

La solución ilustra

$3x = 0$ $2x - 5 = 0$

$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{0}{3}$ $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{5}{2}$

$x = 0$ ó $x = \frac{5}{2}$

Resolviendo ecuaciones del tipo $x^2 = d$

El principio de las raíces cuadradas

- La ecuación $x^2 = d$ tiene dos soluciones de índole real cuando $d > 0$. Las soluciones son $\sqrt{d}$ y $-\sqrt{d}$.
- La ecuación $x^2 = 0$ tiene a cero como su única solución
- La ecuación $x^2 = d$ tiene dos números imaginarios cuando $d < 0$.

Ejemplo Resuelva $3x^2 = 6$

$$\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} = \frac{6}{3} \qquad x^2 = 2$$

Obtengo: $x = \sqrt{2}$ ó $x = -\sqrt{2}$

Para $\sqrt{2}$

$$3x^2 = 6$$
$$3(\sqrt{2})^2 = 6$$
$$(3)(2) = 6$$
$$6 = 6$$

$-\sqrt{2}$

$$3x^2 = 6$$
$$3(-\sqrt{2})^2 = 6$$
$$3(2) = 6$$
$$6 = 6$$

Ejemplo $-5x^2 + 2 = 0$

$$x^2 = \frac{2}{5}$$

Por consiguiente $x = \sqrt{\frac{2}{5}}$ ó $x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

Racionalize

$x = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ ó $x = -\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$x = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ó $x = -\frac{\sqrt{10}}{5}$

Obtenemos las posibles soluciones. Utilice una calculadora para hallar una aproximación

$\pm \frac{\sqrt{10}}{5} \approx \pm 0.632$

Resolviendo ecuaciones del tipo $(x+c)^2 = d$

Ejemplo: Resuelve $(x-2)^2 = 7$ y halle los interceptos de $f(x) = (x-2)^2 - 7$

Resolviendo $(x-2)^2 = 7$

Obtenemos $x - 2 = \sqrt{7}$ ó $x - 2 = -\sqrt{7}$

$x = 2 + \sqrt{7}$ $x = 2 - \sqrt{7}$

Las soluciones son $2 + \sqrt{7}$ $2 - \sqrt{7}$

Los interceptos de $f(x) = (x-2)^2 - 7$ son

$(2 - \sqrt{7}, 0)$ y $(2 + \sqrt{7}, 0)$

(B) Completando el cuadrado

Puede usarse este método para resolver cualquier ecuación cuadrática.

Cuando se resuelva una ecuación, para completar el cuadrado de una expresión como x^2+bx, tomamos la mitad del coeficiente de x, el cual es $\frac{b}{2}$ y se eleva al cuadrado. Entonces sumamos ese número, $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, en ambos lados.

Ejemplo: Resuelva $x^2-6x+8=0$ completando el cuadrado.

$$x^2-6x+8=0$$

$$x^2-6x \quad = -8 \qquad \text{Restar } 8$$

Tomar la mitad de -6 y elevar al cuadrado. Entonces sumar 9 a ambos lados

$$x^2-6x+9=-8+9$$

Factorizo

$$(x-3)^2 = 1$$

Uso el principio de la raíz cuadrada

$$(x-3)=1 \qquad\qquad (x-3)=-1$$

$$x=4 \qquad\qquad x=2$$

Las soluciones son 2 y 4.

Ejemplo Resuelva $x^2+4x-7=0$ completando el cuadrado.

$$x^2+4x-7=0$$

$$x^2+4x \quad =7 \qquad \text{Sumo } 7$$

$$x^2+4x+4=7+4 \qquad \text{Completo el cuadrado}$$

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2=(2)^2=4$$

$$x^2+4x+4=11$$

$$(x+2)^2=11 \qquad \text{Factorizo}$$

$\sqrt{11}=x+2$ ó $-\sqrt{11}=x+2$ Principio de las raíces cuadradas

$x=-2+\sqrt{11}$ ó $x=-2-\sqrt{11}$

Las soluciones son $-2\pm\sqrt{11}$

(c) Aplicaciones y Problemas Verbales

Fórmula del Interés Compuesto

Si una cantidad de dinero, P, es invertida a un interés dado, r, computado anualmente, en t años, crecerá a la cantidad, A, dado por

$$A=P(1+r)^t$$

Ejemplo. Interés Compuesto. Mil dólares a un interés de un 8.4% anual por 2 años. ¿Cuanto crecerá esa cantidad?

$$A = P(1+r)^t$$

$$A = 1000\,(1 + 0.084)^2$$ Substituya en la fórmula

$$A = 1000\,(1.084)^2$$

$$A = 1000\,(1.175056)$$

$A \approx 1175.06$ La cantidad es $\approx \$1175.06$

Ejemplo. Interés compuesto. Cuatro mil dólares son invertidos a un interés r computado anualmente. En dos años crece a \$4410. ¿Cuál es finalmente el porciento?

① $$A = p(1+r)^t$$

② $$4410 = 4000\,(1+r)^2$$

③ $$\frac{441\cancel{0}}{400\cancel{0}} = (1+r)^2$$

④ $$\frac{441}{400} = (1+r)^2$$

⑤ Usando el principio de las raíces cuadradas

$$\sqrt{\frac{441}{400}} = 1+r$$

$$\frac{21}{20} = 1+r$$

$$\frac{21}{20} - \frac{20}{20} = r$$

$$r = \frac{1}{20}$$

⑤ usando el principio de las raíces cuadradas.

$$-\sqrt{\frac{441}{400}} = 1 + r$$

$$-\frac{21}{20} = 1 + r$$

$$-\frac{21}{20} - \frac{20}{20} = r$$

$$r = -\frac{41}{20}$$

Dado de que el interés no puede ser negativo, entonces

$$r = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ ó } 5\%$$