Sección 6.6 Resolución de Ecuaciones Radicales

ⓐ Principio de las potencias

"Para cualquier número natural $\underline{n}$, si en una ecuación $a=b$ es cierta, entonces $a^n = b^n$ es cierto"

No siempre es válido por consiguiente, siempre debe cotejarse su uso.

Ejemplo 1 Resuelva $\sqrt{x} - 3 = 4$ para x

Solución

$\sqrt{x} - 3 + 3 = 4 + 3$ Sumar 3 ambos lados

$\sqrt{x} = 7$ Proceda a el principio de las potencias

$(\sqrt{x})^2 = (7)^2$

$x = 49$

Comprobando $\sqrt{49} - 3 = 4$, $7 - 3 = 4$, $4 = 4$

Recuerde siempre verificar o comprobar el resultado porque el principio <u>NO</u> aplica el 100% de las veces.

Ejemplo Resuelve $\sqrt{x} = -3$ ⟷ Nota: La raiz cuadrada de un número nunca es negativa.

Si aplicamos el principio

$\sqrt{x} = -3$

$(\sqrt{x})^2 = (-3)^2$

$x = 9$

Aquí el principio <u>NO</u> Aplica

Comprobando:

$\sqrt{9} \stackrel{?}{=} -3$

$\sqrt{9} \stackrel{?}{=} -3$

$3 \neq -3$

Ejemplo: Resuelve $x-7 = 2\sqrt{x+1}$

$(x-7)^2 = (2\sqrt{x+1})^2$ —use el principio de las potencias.

$$\begin{array}{r} x-7 \\ x-7 \\ \hline x^2-7x \\ -7x+49 \\ \hline x^2-14x+49 \end{array}$$

$(2^2)(\sqrt{x+1})^2$

Entonces $x^2-14x+49 = 4(x+1)$ ← multiplique los términos a la derecha de la igualdad

$x^2-14x+49 = +4x+4$

$x^2-14x-4x+49-4=0$ → Iguale el polinomio a cero.

$x^2-18x+45=0$

Factorize $(x-3)(x-15)=0$

$x-3=0$ $\quad$ $x-15=0$

$x=3$ $\quad$ $x=15$

Compruebe para cada resultado en la formula original

$x-7=2\sqrt{x+1}$	$x-7=2\sqrt{x+1}$
$3-7=2\sqrt{3+1}$	$15-7=2\sqrt{15+1}$
$-4=2\sqrt{4}$	$8=2\sqrt{16}$
$-4=2(2)$	$8=2(4)$
$-4\neq 4$	$8=8$
Puede decirse que no es solución	Cierto. Sí es solución

(b) Ecuaciones con dos términos en el radical

Procedimiento:

1. Aisle uno de los términos radicales.
2. Use el principio de las potencias.
3. Si queda un radical, lleve a cabo los pasos 1 y 2 de nuevo.
4. Verifique las soluciones posibles.

Ejemplo: Resuelva $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = 4$

Aisle uno de los términos radicales $\quad \sqrt{x-3} = 4 - \sqrt{x+5}$

Use el principio de las potencias $\quad (\sqrt{x-3})^2 = (4 - \sqrt{x+5})^2$ $\quad$ Eleve al cuadrado el binomio $4-\sqrt{x+5}$

$$x - 3 = 16 - 8\sqrt{x+5} + (x+5)$$

Substraer y agrupar términos semejantes $\quad -3 = 21 - 8\sqrt{x+5}$

Aislar el término del radical $\quad -24 = -8\sqrt{x+5}$

Dividir por -8 $\quad \frac{-24}{-8} = \frac{-8\sqrt{x+5}}{-8}$

Cuadrar (Elevar el cuadrado) $\quad 3^{2} = (\sqrt{x+5})^{2}$

$$9 = \cancel{x+5}$$
$$9 = x + 5$$
$$4 = x$$

Ejemplo: Resuelva la expresión radical que sigue.

$$\sqrt{2x-5} = 1 + \sqrt{x-3}$$

$$\left(\sqrt{2x-5}\right)^2 = \left(1+\sqrt{x-3}\right)^2$$ Elevar al cuadrado a ambos lados.

$$2x-5 = 1 + 2\sqrt{x-3} + \left(\sqrt{x-3}\right)^2$$

$$2x-5 = 1 + 2\sqrt{x-3} + (x-3)$$

$$x-3 = 2\sqrt{x-3}$$ Aislar el radical

$$(x-3)^2 = \left(2\sqrt{x-3}\right)^2$$ Elevar al cuadrado

$$x^2-6x+9 = 4(x-3)$$

$$x^2-6x+9 = 4x-12$$

$$x^2-6x-4x+9+12=0$$

$$x^2-10x+21=0$$

$$(x-7)(x-3)=0$$ Factorizar

$$x=7 \qquad x=3$$

Comprobación:

Si reemplazamos $x=7$ en la expresión radical observamos que:

$$\sqrt{2(7)-5} = 1+\sqrt{7-3}$$
$$\sqrt{14-5} = 1+\sqrt{4}$$
$$\sqrt{9} = 1+\sqrt{4}$$
$$3 = 1+2$$
$$3=3$$

Reemplazamos con $x=3$

$$\sqrt{2(3)-5} = 1+\sqrt{3-3}$$
$$\sqrt{6-5} = 1+\sqrt{0}$$
$$\sqrt{1} = 1+0$$
$$1 = 1$$

Ambos resultados son las soluciones al problema.

Ejemplo $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+2}+1=0$

Primero debe aislarse un radical

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+2}+1=0$$
$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+2}-1$$
$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+2}-1\right)^2$$

Elevar al cuadrado

$$x+2 = \left(\sqrt{2x+2}\right)^2-2\sqrt{2x+2}+1$$
$$x+2 = 2x+2-2\sqrt{2x+2}+1$$

Aislando el radical

$$-x-1 = -2\sqrt{2x+2}$$

Multiplicar por -1 $\quad x+1 = 2\sqrt{2x+2}$

Elevar al cuadrado $\quad (x+1)^2 = \left(2\sqrt{2x+2}\right)^2$

$$x^2+2x+1 = 4(2x+2)$$

$$x^2+2x+1 = 8x+8$$

$$x^2+2x+1-8x-8=0$$

$$x^2-6x-7=0$$

$$(x-7)(x+1)=0$$

$$x-7=0 \qquad x+1=0$$
$$x=7 \qquad x=-1$$

Comprobando para $x=7$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+2}+1=0$$

$$\sqrt{7+2}-\sqrt{2(7)+2}+1=0$$

$$\sqrt{9}-\sqrt{14+2}+1=0$$

$$3-\sqrt{16}+1=0$$

$$3-4+1 \stackrel{?}{=} 0$$

$$-1+1=0$$

Sí $\qquad 0=0$

Comprobando para $x=-1$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+2}+1=0$$

$$\sqrt{-1+2}-\sqrt{2(-1)+2}+1=0$$

$$\sqrt{1}-\sqrt{-2+2}+1=0$$

$$\sqrt{1}-\sqrt{0}+1=0$$

$$1-0+1=0$$

$$2\neq 0$$

NO

Ejemplos Adicionales

① $\sqrt{x} - 7 = 3$

$\sqrt{x} = +7 + 3$

$(\sqrt{x})^2 = (10)^2$

$x = 100$

comprobando:

$\sqrt{x} - 7 = +3$

$\sqrt{100} - 7 = 3$

$10 - 7 = 3$

$3 = 3$ sí

② $\sqrt{x} = -2$

$(\sqrt{x})^2 = (-2)^2$

$x = 4$

comprobando:

$\sqrt{4} = -2$

$\sqrt{4} \longrightarrow$ no puede dar como resultado una raíz cuadrada negativa.

③ $x + 2 = \sqrt{2x+7}$

$(x+2)^2 = (\sqrt{2x+7})^2$

$x^2 + 4x + 4 = 2x + 7$

$x^2 + 4x - 2x + 4 - 7 = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)(x-1)$

$$
\begin{array}{r}
x+2 \\
\underline{x+2} \\
x^2 + 2x \\
\underline{+2x + 4} \\
x^2 + 4x + 4
\end{array}
$$

$$x+3=0$$
$$x=-3$$

$$x+-1=0$$
$$x=1$$

Comprobando para:

$x=-3$

$$\sqrt{2x+7}=x+2$$
$$\sqrt{2(-3)+7}=-3+2$$
$$\sqrt{-6+7}=-3+2$$
$$\sqrt{1}=-1$$
$$1\neq-1$$

NO

$x=1$

$$\sqrt{2x+7}=x+2$$
$$\sqrt{2(1)+7}=1+2$$
$$\sqrt{2+7}=1+2$$
$$\sqrt{9}=1+2$$
$$3=3$$

SÍ